

篇名：  
力沙球圖形

作者：

鮑若苙。私立育達高中。高二64班

曾彥儒。私立育達高中。高二67班

指導老師：

陳康青老師

周鴻案老師

## 壹·前言：

在書店中看到了一本書---「胚騰-無所不在的模式」，由 David Wade & Anthony Ashton 著，蔡承志譯；裡面有許多美麗的圖形，其中有一段提到有形的聲音，聲音居然可以「看見」，吸引了我，藉著利沙球圖形與擺線圖形探討太陽的行星對地球的運動軌跡。

本研究由描繪及拍攝二維簡諧運動所產生的圖形去探討太陽系各行星對地球的相對運動所產生的運動軌跡，發現我們的研究結果與太陽系的華爾滋(John Martineau & Robin Heath，葉偉文譯，p.188)中的圖形非常吻合，所以書中的美妙的圖形只是同心、同平面、同方向、不同頻率的圓周運動間的相對運動。

## 貳·正文

### 一·研究過程與方法：

#### 1·描繪利沙球圖形。

十九世紀中期的法國數學家利沙球（Jules Lissajous，1822-1880）設計出一種實驗；他發現若是把一面小鏡子擺在音叉末端，並以光線對準鏡子照射，就可以把音叉的振動投影到暗色螢幕上。敲擊音叉又會產生垂直的短線，這時馬上再用另一面鏡子側向投射，結果就會產生正弦波，如圖 1【David Wade & Anthony Ashton 蔡承志譯，2004】。倘若不從側向投射，而是拿另一支音叉擺成與第一支音叉垂直的角度，來產生橫向運動，若兩支音叉的頻率為簡單的整數比，就會投射出漂亮的造型，如圖 2。今日稱為利沙球圖形（Lissajous Figure）。

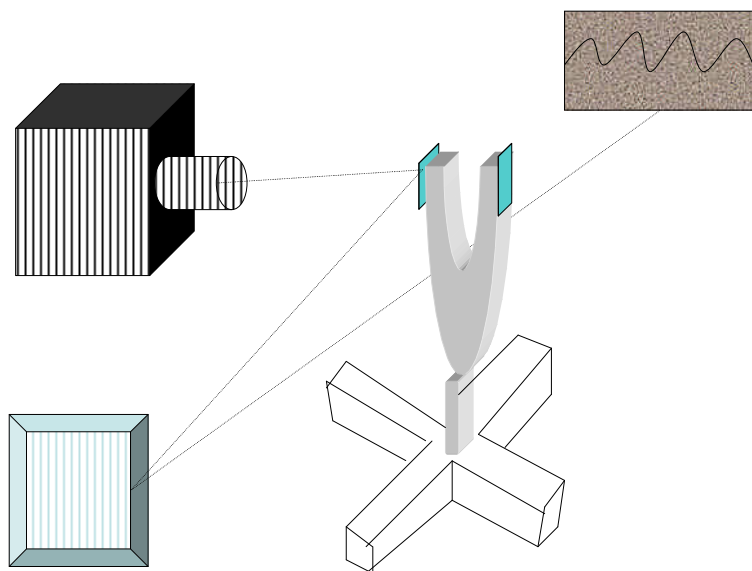


圖 1

以光槓桿觀察聲音 1

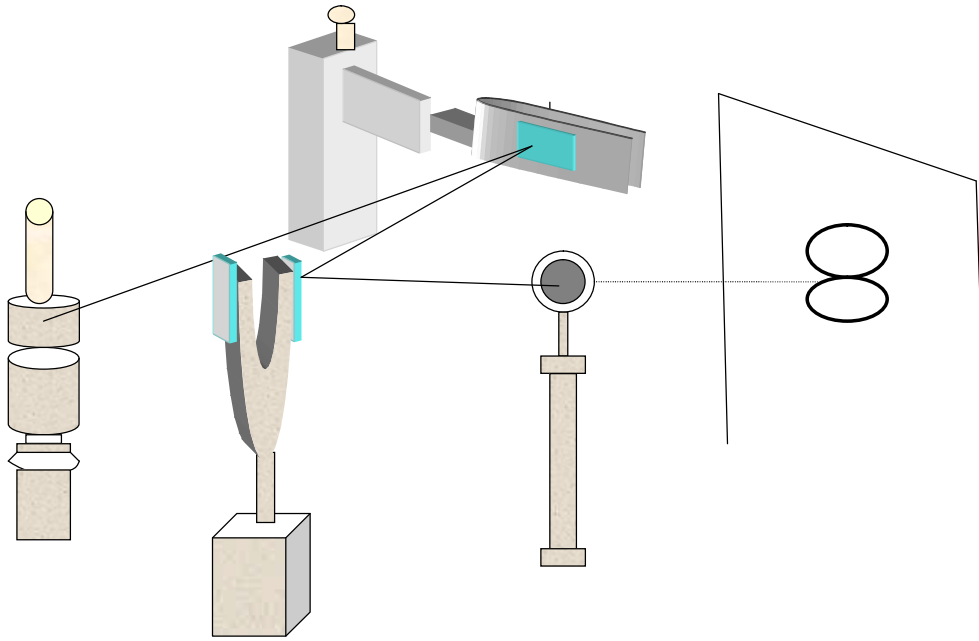


圖 2  
以光槓桿觀察聲音 2

利沙球圖形的方程式是

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos[\omega_y t - \varphi] \\ y(t) = A_y \cos[\omega_y t] \end{cases} \dots\dots(1)$$

1 ·

$\phi$ $(\omega_x, \omega_y)$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
(1,1)					
(1,2)					
(2,3)					
(3,5)					
(4,5)					

圖 3(a)是用電腦所畫出的利沙球圖形。圖 3(b)則是用儀器(Pattern Generator)所拍攝的利沙球圖形。  
圖 3(c) , 3(d) , 3(e) , 3(f)則是所使用的儀器。

2 · 用相機拍攝胚騰產生器所產生的圖形。

$\phi$ $(\omega_x, \omega_y)$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
(1,1)					
(1,2)					
(2,3)					
(3,5)					
(4,5)					

圖 3-(b)則是用儀器(Pattern Generator)所拍攝的利沙球圖形。圖 3-(c)與圖



圖 3-(c)  
胚騰產生器正面圖。

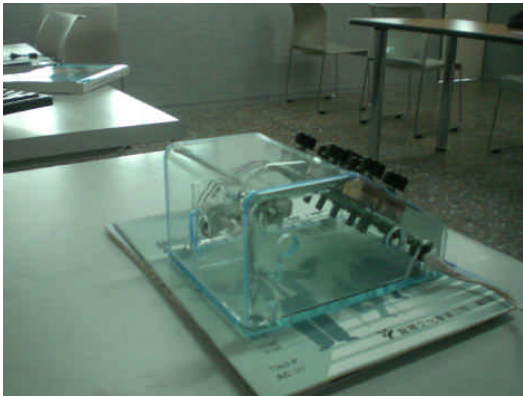


圖 3-(d)  
胚騰產生器側面圖。  
(右前方小孔為雷射光入口，雷射經雙重鏡面反射後，由左側大孔將反射之圖形射至屏幕上。)



圖 3-(e)  
氦氖雷射  
(632.8nm，紅光)



圖 3-(f)

實驗儀器全圖

(雷射光由左側射至胚騰產生器，經胚騰產生器射至牆上。)

三、

當一個小圓在一個大圓的外部沿著大圓作不滑的滾動時，小圓圓周上的點所描繪的旋輪線稱為外擺線(epicycloid)。

其方程式為

$$\begin{cases} x(t) = A\cos t + \cos(\omega t) \\ y(t) = A\sin t - \sin(\omega t) \end{cases} \dots\dots(2)$$

小圓內部與外部的點所描繪的旋輪線稱為外次擺線 (epitrochoid)。

其方程式為

$$\begin{cases} x(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t - \phi_2) \\ y(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\sin(\omega_2 t - \phi_2) \end{cases} \dots\dots(3)$$

如圖 4-(a)。

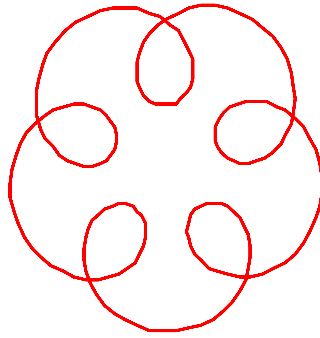


圖 4-(a)

當  $\omega_1=6$ ， $\omega_2=1$ ， $\varphi_1=-0.5*\pi$ ， $\varphi_2=0$  時所產生的圖形

其操控方式如下：

1. 當  $\omega_2=6$ ， $\omega_1=1$  時， $A_1/A_2$  比值逐漸變小時圖形的變化（內部的小圈逐漸變大）。如圖 4-(b)

A1/A2	6	5	4	3	2	1
圖形						

圖 4-(b)

2. 當  $A_1=3$ ， $A_2=1$ ， $\omega_1=1$  時， $\omega_2-\omega_1$  之值逐漸變小時，圖形的變化（內部的小圈數目逐漸變少，而小圈的大小也變小）。如圖 4-(c)

$\omega_2-\omega_1$	5	4	3	2	1
圖形					

圖 4-(c)

3. 當  $A_1 = 3$  ,  $A_2 = 1$  ,  $\omega_1 = 1$  , 而且  $\omega_2 - \omega_1 = 5$  ,  $\varphi_2 = 0$  時 ,  $\varphi_1$  增加 , 圖形向  
順時針方向旋轉。如圖 4 - ( d )

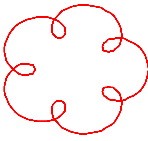
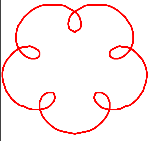
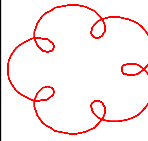
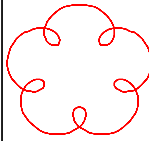
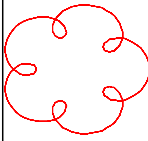
$\varphi_1$	0	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$	$4\pi/4$
圖形					

圖 4 - ( d )

4. 當  $A_1 = 3$  ,  $A_2 = 1$  ,  $\omega_1 = 1$  , 而且  $\omega_2 - \omega_1 = 5$  ,  $\varphi_1 = 0$  時 ,  $\varphi_2$  增加 , 圖形向  
逆時針方向旋轉。如圖 4 - ( e )

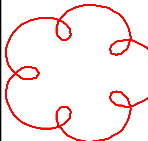
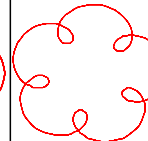
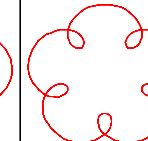
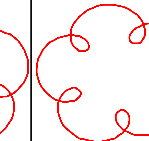
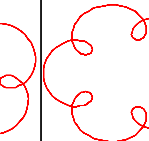
$\varphi_2$	0	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$	$4\pi/4$
圖形					

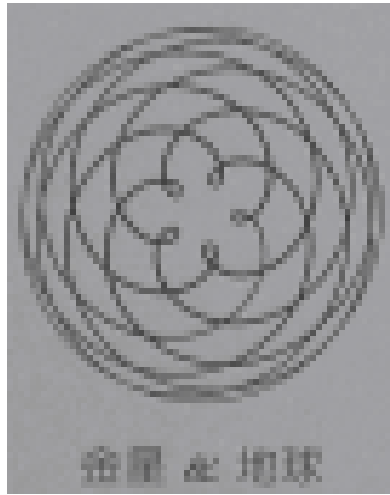
圖 4 - ( e )





水星 & 地球

5-(a)



金星 & 地球

5-(b)



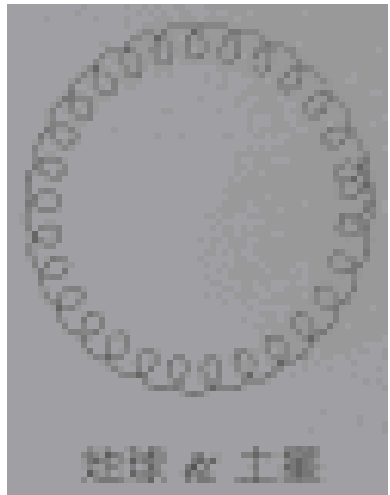
地球 & 火星

5-(c)



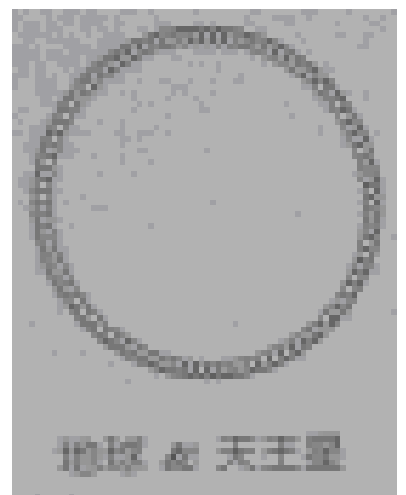
地球 & 木星

5-(d)



地球 & 土星

5-(e)



地球 & 天王星

5-(f)

圖 5

書上顯示的行星對地球或地球對行星的運動的軌跡。

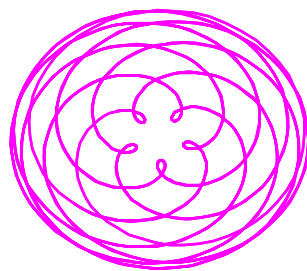
太陽 &行星	近日點 ( $10^6$ km)	軌道平均值 ( $10^6$ km)	遠日點 ( $10^6$ km)	偏心率	軌道傾角 (度)	近日經 度(度)	軌道週期 (天)	回歸年(天)	旋轉週期 (時)
太陽	-	-	-	-	-	-	-	-	600-816
水星	46.00	57.91	69.82	0.205631	7.0049	77.456	87.969	87.968	1407.6
金星	107.48	108.21	108.94	0.006773	3.3947	131.53	224.701	224.695	-5832.5
地球	147.09	149.60	152.10	0.016710	0	102.95	365.256	356.242	23.934
火星	206.62	227.92	249.23	0.093412	1.8506	336.04	686.980	686.973	24.623
木星	740.52	778.57	816.62	0.048393	1.3053	14.753	4,332.6	4,330.6	9.9250
土星	1,352.2	1,433.5	1,514.5	0.054151	2.4845	92.432	10,759.2	10,746.9	10.656
天王星	2,741.3	2,872.46	3,003.6	0.047168	0.76986	170.96	30,685	30.589	-17.239
海王星	4,444.4	4,495.1	4,545.7	0.008585 9	1.7692	44.971	60,190	59,800	16.11
冥王星	4,435.0	5,869.7	7,304.3	0.24881	17.142	224.07	90,456	90,588	-153.29

圖 6

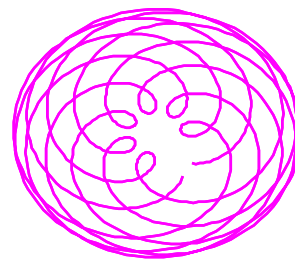
太陽系各行星資料圖



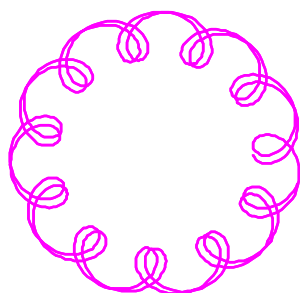
7-(a)



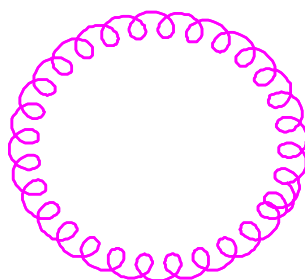
7-(b)



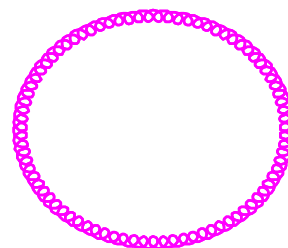
7-(c)



7-(d)



7-(e)



7-(f)

## 圖 7

利用圖 6 行星資料代入方程式(3)，所描繪出圖形。

### 參·結論：

「西方科學家對『胚騰』一直很感興趣，胚騰的辨識也確實可以視為科學的基礎」，由物理學出發可以了解與欣賞自然之美，學物理很有趣。

### 肆·引註資料：

(1)蔡承志(2004)。**胚騰**。天下遠見出版股份有限公司

(2)葉偉文(2002)。**太陽系的華爾滋**。天下遠見出版股份有限公司

(3)謝芳生(譯)(1981)。**物理學**。東華書局

(4)趙文敏(1973)**幾何學中的海倫**。

[http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm\\_20\\_11\\_1/index.html](http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_20_11_1/index.html)

(5)姚珩(民97)**高中物理上**。翰林出版事業股份有限公司